ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Ορισμός: Ονομάζουμε τοπολογία ενός μ.χ (E,ρ) τη συλλογή όλων των ανοικτών υποσυνόλων του E. Συμβολίζουμε με τ_ρ την τοπολογία ενός μχ (E,ρ)

Επίσης, $\tau_\rho \neq \emptyset$ διότι σε κάθε μχ E, τα σύνολα E και $\emptyset$ είναι πάντοτε ανοιχτά σύνολα και άρα μέλη της τ_ρ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

Έστω $\mathcal{A} \subseteq \tau_\rho$, τότε:

i) $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_\rho$ και ii) $\mathcal{A}$ πεπερ. υποσυλλογή της $\tau_\rho \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \tau_\rho$

Ορισμός: Ας είναι ρ_1 και ρ_2 μετρικές στον E. Τότε:

ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες $\Leftrightarrow \tau_{\rho_1} = \tau_{\rho_2}$

Ορισμός: Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_\rho$ τη συλλογή όλων των περιοχών σε ένα μχ (E,ρ) και $\mathcal{N}_\rho(a)$ τη συλλογή όλων των περιοχών ενός τυχόντος $a \in E$, όπου $\mathcal{N}_\rho(a) \subseteq \mathcal{N}_\rho$ και $\tau_\rho \subseteq \mathcal{N}_\rho$

Παράδειγμα:

Το σύνολο $[0,3) \notin \tau_{11}$ αφού δεν είναι κλειστό αλλά

Το σύνολο $[0,3) \in N_{11}(1)$ αφού το $1 \in [0,3)$

Πρόταση: Ας είναι ρ_1, ρ_2 δύο μετρικές στον E. Τότε:

ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες $\Leftrightarrow N_{\rho_1}(a) = N_{\rho_2}(a)$, $\forall a \in E$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\{\Rightarrow\}$: Έστω ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες μετρικές και $U(a)$ τυχούσα περιοχή του a τέτοια ώστε $U(a) \in N_{\rho_1}(a)$. Τότε αφού $U(a)$ περιοχή του a (εφοδιασμένη με τη ρ_1):

$(\exists r>0)$: $B_{\rho_1}(a,r) \subseteq U(a)$. Αλλά $B_{\rho_1}(a,r)$ ανοιχτό σύνολο εν E

Συνεπώς, $B_{\rho_1}(a,r) \in \tau_{\rho_1} \xRightarrow{\tau_{\rho_1}=\tau_{\rho_2}} B_{\rho_1}(a,r) \in \tau_{\rho_2} \Rightarrow B_{\rho_2}(a,r) \in \tau_{\rho_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow U(a) \in \mathcal{N}_{\rho_2}(a)$. Συνεπώς, $\mathcal{N}_{\rho_1}(a) \subseteq \mathcal{N}_{\rho_2}(a)$. Λόγω συμμετρίας των υποθέσεων όμοια βγαίνει ότι $\mathcal{N}_{\rho_2}(a) \subseteq \mathcal{N}_{\rho_1}(a)$

$\{\Leftarrow\}$: Έστω ότι $N_{\rho_1}(a) = N_{\rho_2}(a)$, $\forall a \in E$ και ΘΔΟ $\tau_{\rho_1} = \tau_{\rho_2}$

Έστω σύνολο $A \in \tau_{\rho_1}$ και τυχόν $a \in A$ τότε

$(\exists U(a) \in N_{\rho_1}(a)) : U(a) \subseteq A$ αλλά $N_{\rho_1}(a) = N_{\rho_2}(a)$, άρα

$(\exists U(a) \in N_{\rho_2}(a)) : U(a) \subseteq A \xRightarrow{a \text{ τυχόν}} A$ ανοιχτό ως προς τη $\rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A \in \tau_{\rho_2} \Rightarrow \tau_{\rho_1} \subseteq \tau_{\rho_2}$. Λόγω συμμετρίας των υποθέσεων

προκύπτει όμοια ότι $\tau_{\rho_2} \subseteq \tau_{\rho_1}$ και άρα $\tau_{\rho_1} = \tau_{\rho_2}$.

Γνωρίζαμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση $i : (E, \rho_1) \to (E, \rho_2)$ δεν είναι πάντα συνεχής. Και φέρναμε το παρακάτω αντιπαράδειγμα:

$i : (\mathbb{R}, |\,|) \to (\mathbb{R}, \rho)$ όπου ρ η διακριτή μετρική

Επιλέγουμε το διάστημα $(0,1]$ και παρατηρούμε ότι εφόσον η i αντιστρέφεται (λόγω ότι πάντα 1-1 και επί):

$i^{-1}((0,1])$ είναι ανοικτό σύνολο στο διακριτό μχ

αλλά το $(0,1]$ δεν είναι ανοικτό στον ευκλείδειο μχ

Άρα, $i^{-1}((0,1]) \neq (0,1] \Rightarrow i$ όχι συνεχής συνάρτηση

Πρόταση: Έστω $i : (E, \rho_1) \to (E, \rho_2)$ με i: ταυτοτική

Τότε η i συνεχής $\Leftrightarrow \tau_{\rho_2} \subseteq \tau_{\rho_1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\{\Rightarrow\}$: Έστω i συνεχής και $A \in \tau_{\rho_2}$

Τότε, $i^{-1}(A) = A$ όπου A ανοιχτό στον (E, ρ_1)

Δηλαδή, το $A \in \tau_{\rho_1}$

Άρα, $\tau_{\rho_2} \subseteq \tau_{\rho_1}$.

$\{\Leftarrow\}$: Έστω $\tau_{\rho_2} \subseteq \tau_{\rho_1}$ και ΘΔΟ $i : (E, \rho_1) \to (E, \rho_2)$ συνεχής

Έστω τυχόν $A \in \tau_{\rho_2} \Rightarrow A \in \tau_{\rho_1}$

Άρα, $i^{-1}(A) = A \in \tau_{\rho_1} \rightsquigarrow A$ ανοικτό άρα i συνεχής

Πρόταση: Δύο μετρικές ρ_1, ρ_2 στον μχ E είναι ισοδύναμες ανν η ταυτοτική είναι ομοιομορφισμός

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\{\Rightarrow\}$: Έστω οι ρ_1 και ρ_2 ισοδύναμες $\Rightarrow \tau_{\rho_1} = \tau_{\rho_2}$ από την προηγούμενη πρόταση i συνεχής αλλά και i^{-1} συνεχής

$\{\Leftarrow\}$: Έστω οι i και i^{-1} συνεχείς τότε από την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε ότι $\tau_{\rho_1} \subseteq \tau_{\rho_2}$ και $\tau_{\rho_2} \subseteq \tau_{\rho_1}$ αντίστοιχα.